Matemáticas quebradas describen la naturaleza

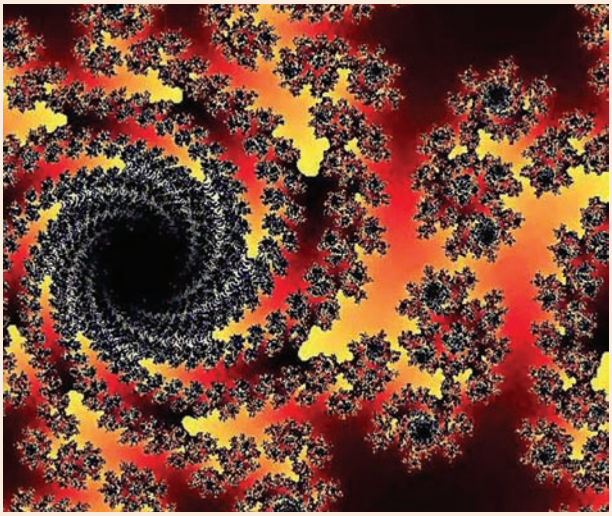
*Por Hugo Donner**

En el 2007, Nassim Nicholas Taleb publicó el best-seller "The Black Swan" (El Cisne Negro), un ensayo, inclasificable y maravilloso, en el que denuncia como inadecuada la matemática que es utilizada en la base de algunas disciplinas -particularmente las ciencias sociales- lo que implica la obtención de resultados incorrectos o inútiles. Paradójicamente, si bien su tesis central es que es absurdo postular la existencia de "expertos" en campos tales como la economía, especialmente en lo que refiere a la capacidad de predicción, en un capítulo del libro él mismo menciona como nota lateral la alta posibilidad de que en un corto plazo se produjera un cataclismo financiero como el que estamos viviendo.

Como alternativa a la matemática utilizada actualmente en esas disciplinas, que consiste mayoritariamente en modelos basados en la hipótesis de una distribución estadística normal o gaussiana, propone un modelo basado en la matemática fractal.

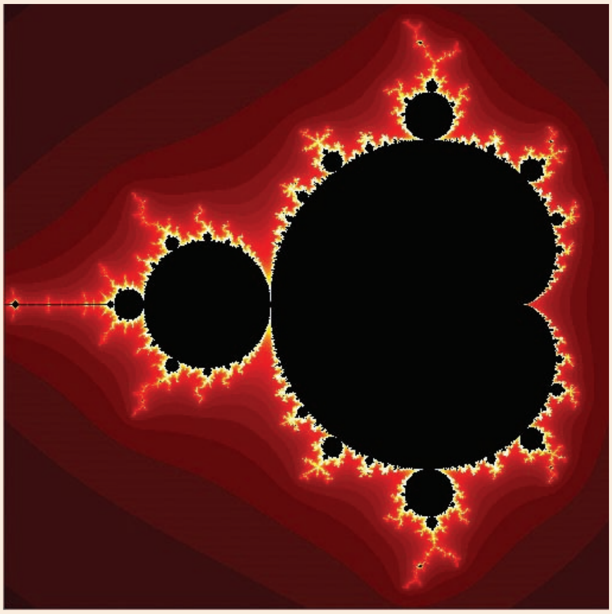
Esta iniciativa renueva el interés sobre una apasionante rama de la matemática relativamente reciente, conocida y utilizada por la comunidad científica pero largamente ignorada por el público en general en Uruguay. Baste decir que apenas existe una pequeña mención a ella en un único texto en los programas de los ciclos educativos, a pesar de que ha tenido formidables aplicaciones prácticas particularmente en la generación de imágenes por computadora y en el diseño de eficientes algoritmos de compresión de datos.

En la introducción al libro *"Fractals: Form, Chance, and Dimension"* (Fractales: Forma, Azar y Dimensión) de B. Mandelbrot, se puede leer: "Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, y los rayos no se propagan según una línea recta. La complejidad de las formas de la naturaleza difiere, no sólo en grado sino en especie, de aquéllas de la geometría ordinaria. Para desarrollar esas formas, Benoit Mandelbrot concibió y desarrolló una nueva geometría, la geometría de las formas fractales. Su trabajo constituye un aporte muy significativo a una enormidad de campos muy diversos."



Mandelbrot acuñó el término "fractal" en referencia a la característica irregular y fragmentaria de aquellas formas que pretendía describir. El término es especialmente apropiado porque también sugiere la idea de fracción aritmética (quebrado), que, como se verá más adelante, tiene mucho que ver con el enfoque del tema.

Todos tienen una razonablemente clara noción de dimensión, que sería la dimensión definida en la geometría euclidiana. En esta, un objeto de dimensión 0 es un conjunto de puntos. Un objeto de dimensión 1 es una línea, una curva. Tiene largo pero no tiene ancho ni espesor. Un objeto de dimensión 2 es una superficie, por ejemplo un plano. Tiene largo y ancho pero no espesor. Los objetos de dimensión 3 son los que pueblan nuestro mundo diario, los que se captan con los sentidos. Tienen largo, ancho y espesor.



Conjunto de Mandelbrot

A partir de la relatividad de Einstein se sabe que para describir correctamente el universo, se debe utilizar un espacio donde una cuarta dimensión, el tiempo, se agrega en forma indisoluble a las otras tres.

Los científicos manejan cómodamente espacios y objetos de más dimensiones (n-dimensionales), con el fin de describir fenómenos complejos, donde intervienen muchos elementos relacionados pero independientes entre sí.

En estos casos se obtienen resultados útiles, pero es prácticamente imposible tener una idea intuitiva de la "forma" de estos objetos, por ejemplo de un hipercubo (la generalización de un cubo a cuatro dimensiones), que es un espacio ortogonal limitado de cuatro dimensiones. En todos los casos, para describir al objeto se necesita una función matemática que relaciona entre sí tantos números (variables) como dimensión tiene el objeto.

Características

Mandelbrot, con los fractales, introdujo en las matemáticas un tipo de dimensión nuevo y varias otras ideas nuevas y distintas.

Primero, la forma de describirlos ya no es una función matemática sino en muchos casos, una "receta" para su construcción, lo que en lenguaje informático se llama "algoritmo".

Segundo, el fractal propiamente dicho es el límite o punto de llegada infinitamente alejado, de infinitas repeticiones (iteraciones) de la aplicación sucesiva de la receta. Cuando se cree estar viendo un fractal, en realidad se está viendo sólo una etapa intermedia de su construcción, la obra suspendida en un momento en que el "autor" decidió que a los efectos prácticos, ya era suficiente.

Tercero, un objeto fractal exhibe una característica muy particular: la "autosimilitud" o invariancia a la escala. Esto significa que a distintas escalas de observación (grano cada vez más fino), presenta características idénticas, o por lo menos similares o equivalentes. En otras palabras, si se observa un verdadero fractal (ideal) a simple vista, con una lupa, o con un microscopio de 10 aumentos, de 100, de 1000 o de un millón, siempre se verá lo mismo, o por lo menos cosas muy parecidas.

Cuarto, los fractales que presentan alguna utilidad en la descripción de los fenómenos naturales se pueden clasificar en familias de características comunes en sentido "estadístico". Dos árboles, o dos picos nevados, o dos personas no son idénticos, aunque inmediatamente se puede reconocer que son objetos de la misma clase, lo que no ocurre con una esfera, que es idéntica a cualquier otra, salvo por su tamaño, o una línea recta, que es idéntica a cualquier otra salvo por su posición.

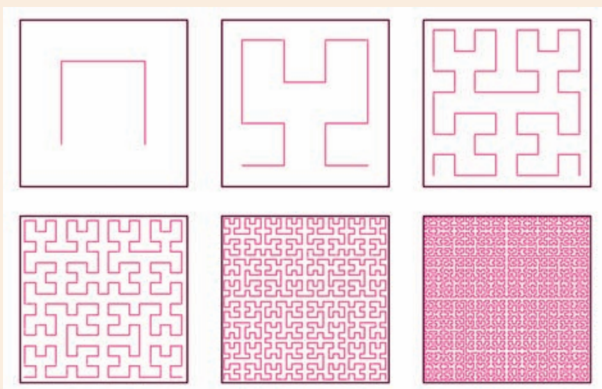
Para lograr esta característica en un fractal, simplemente se hace intervenir algún factor de azar en la receta de construcción. El equivalente en los ejemplos dados es la intervención del azar en la combinación genética que codifica el desarrollo del árbol y del hombre, o el azar de los vientos, cuyo golpeteo molecular modela las montañas a lo largo de los milenios, así como el azar estadístico en la concentración de los componentes químicos de la piedra.

Dimensión fractal

Y quinto, la característica fundamental y más sorprendente de los fractales, es que se puede decir que tienen dimensiones fraccionarias. La dimensión de un fractal puede ser 1.5, 8/3, o 2.6333333…, etc. El desarrollo matemático (ver página 13) que justifica esta insólita característica se puede entender en forma aproximada a partir de la noción intuitiva de dimensión.

Suponiendo que se define una curva como un fractal, es decir dando la receta para su trazado, y se comienza a trazar en un plano (dimensión 2). Supongamos que alguien demuestra que, dado un punto cualquiera de ese plano, indefectiblemente llegará el momento en que, si se continúa trazando la curva, ésta pasará por ese punto, o sea que contendrá a ese punto.

Poco importa que se demore un minuto o un billón de años. En teoría matemática eso no cuenta. En otras palabras, en tiempo infinito, la curva cubrirá completamente el plano. Aunque la geometría indica que por ser una curva tiene dimensión 1, la idea intuitiva de dimensión lleva a



Curva de Peano

Fractales en la naturaleza: copo de nieve y coliflor romanescu

pensar que, a los efectos prácticos, debería tener la misma dimensión que el plano, o sea 2.

Generalizando la idea, si se pudiera suponer que una curva, trazada en tiempo infinito, "cubrirá" con una cierta densidad una cierta área en el plano, uno podría suponer que su dimensión debería estar entre 1 y 2.

Antes de las computadoras, estos conceptos no habrían pasado de ser un divertimento intelectual, como lo fueron las curvas de Peano (1) y otros objetos matemáticos que, debido a su comportamiento patológico, fueron considerados "monstruosidades" en su época por los formales puristas de la geometría y el álgebra.

Pero hoy las computadoras, con su asombrosa capacidad de cálculo, realizando muchos millones de operaciones por segundo, y mostrando el resultado de esas operaciones en pantallas a color con la misma velocidad, permiten acercarse tanto como se quiera a esas abstracciones infinitas, que dejan de serlo para materializarse ante nuestros ojos en imágenes de singular belleza.

Helecho dibujado con fractales

Naturaleza

Entonces, por similitud, se pueden extraer valiosísimas conclusiones sobre los mecanismos de la naturaleza. Si se logra construir un fractal que se parezca mucho a la costa de una isla, su receta quizá aclare muchas cosas sobre los procesos tectónicos y el efecto erosivo de las mareas, las olas y el viento.

Si se logra construir un fractal que se parezca mucho a una estructura vegetal, su receta de construcción dirá mucho sobre la biogenética de esa especie. Si se logra construir fractales que se parezcan a copos de nieve, se podrá aprender mucho sobre la física molecular del cambio de estado en el congelamiento. (2)

Particularmente, los fractales han demostrado ser muy útiles en un aspecto de la física que siempre se mostró esquivo ante los intentos de explicación: el momento preciso del inicio del comportamiento turbulento y caótico en sistemas de comportamiento lineal y predecible, al variar en forma continua sus parámetros. Por ejemplo, los flujos de fluidos.

Algunos fractales simulan tan bien los fenómenos naturales que han sido extensamente utilizados como base de los sistemas de generación de imágenes por computadora, en la fabricación de mundos ficticios, inexistentes, pero que se parecen mucho a lo que conocemos. Tienen "sabor a real" sin serlo en lo más mínimo.

Al ver en una pantalla la simulación del crecimiento acelerado del embrión de una forma viva, cuesta creer que simplemente se está viendo la iteración, o repetición, de "generaciones" de un fractal de receta sencilla, embellecido y retocado por otro programa que, de acuerdo a criterios también matemáticos, le agrega la sensación de volumen, sombra y textura.

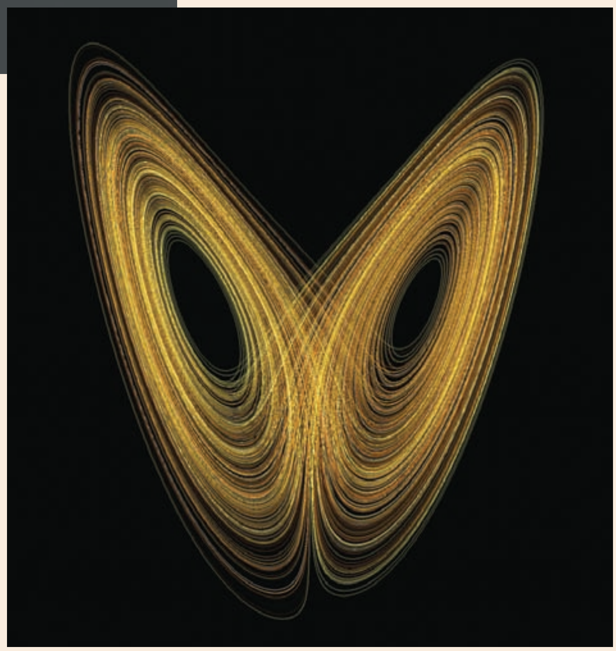
Especialistas en esto son los "Estudios Pixar" fundados por George Lucas, en California, donde se producen por computadora imágenes de impresionante realismo para las películas del tipo de "Guerra de las Galaxias", o incluso

Fractales en la naturaleza: caracol nautilus

Paisaje dibujado con fractales

Hoy los fractales se utilizan en el estudio y la predicción del área de las nubes (y en consecuencia su cobertura), dato importante para conocer la cantidad de agua precipitable y determinar la transferencia de radiación solar y terrestre a través de la capa nubosa. El área de las nubes es proporcional al perímetro elevado a 1.48, calculado a partir de que la dimensión fractal es 1.35.

$2 / 1.35 = 1.48$



Atractor de Lorenz

generadas totalmente en base a esas técnicas. La primera realizada totalmente por computadora fue *"Toy Story"* y luego vinieron muchísimas más.

Loren C. Carpenter fue el autor de un cortometraje de fractales llamado "Vol Libre" a raíz del cual fue contratado por Lucasfilm para que se encargara de los efectos especiales informáticos de la película *"Star Trek II:* La Venganza de Khan". Uno de los efectos más conocidos es la secuencia de la transformación del planeta Génesis, en el que si uno se fija bien puede ver los triángulos generadores.

Más tarde otra película *"The Last Starfighter"* incluyó muchas escenas fractales. Todo esto ocurrió a finales de los 70 y principio de los 80. (3)

Meteorología

Otra gran rama de la matemática relacionada con los fractales es la Teoría del Caos, que describe el comportamiento de ciertos sistemas dinámicos que exhiben una altísima sensibilidad a las condiciones iniciales, popularmente conocido como el "efecto mariposa" (4). Su estudio conduce al desarrollo de modelos que permiten encontrar, dentro de un entorno caótico, patrones de orden local con fines útiles.

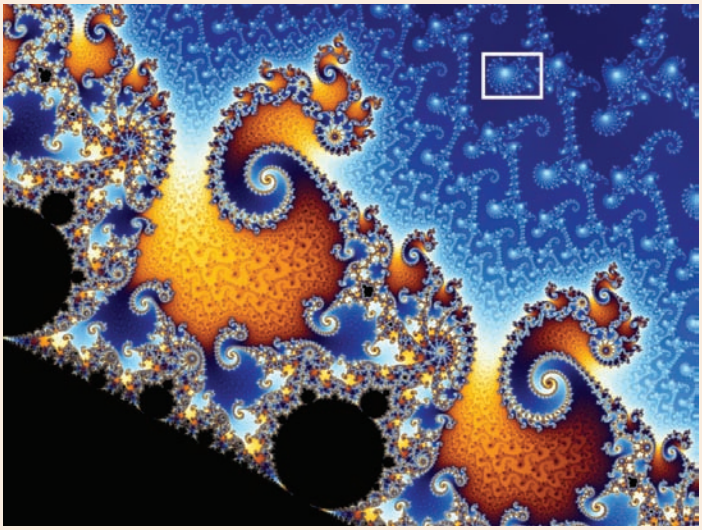
Algunos comportamientos caóticos, que parecen regidos exclusivamente por el azar, terminan convergiendo a patrones definidos, de tipo cíclico, por ejemplo, los llamados "atractores extraños" *(strange attractors)*, llamados así porque actuarían como un imán que "atrae" al sistema hacia ese comportamiento. Hay atractores que acercan al sistema a su funcionamiento óptimo y otros que lo alejan del mismo.

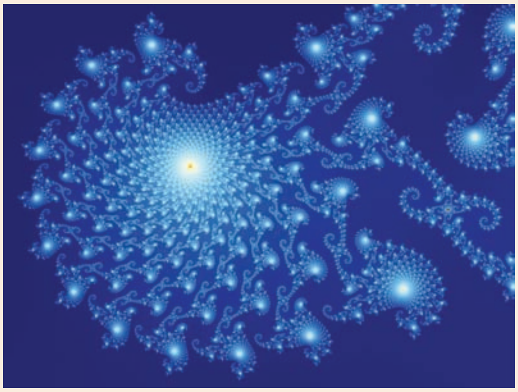
Un caso clásico, que además es el que dio origen al descubrimiento de los fractales es el de los modelos meteorológicos de predicción del clima.

En 1961, Edward Lorenz estaba utilizando un computador central para computar modelos meteorológicos. Había hecho unas cuantas corridas cuando se le terminó su tiempo de uso de la computadora (muy caro en esa época). Guardó los resultados intermedios con una precisión de 3 dígitos decimales que juzgó suficiente. La precisión interna de la máquina era de 6 dígitos. Al otro día, al cargar los resultados intermedios para reiniciar los cálculos, la evolución del modelo fue radicalmente diferente a todas las corridas anteriores. En ese momento comenzó a sospechar que había algo muy grande involucrado.

A partir de allí se construyó una riquísima rama de la matemática que, aparte de las variadísimas aplicaciones al mundo real -de las que se han enumerado solo unas pocas- permitió una aproximación totalmente nueva al universo matemático: la utilización de la computadora como herramienta de exploración.

No es una exageración comparar la computadora personal corriendo los programas de generación de fractales y sus varios objetos relacionados, como los conjuntos de Juliá y el conjunto de Mandelbrot (5), con las naves de Magallanes explorando territorios desconocidos.





Bibliografía:

1. Benoît Mandelbrot, La Geometría Fractal de la Naturaleza, Tusquets, 1997. ISBN 84-8310-549-7

2. Kenneth Falconer, Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons, Ltd., 2003. ISBN 0-470-84862-6.

3. Benoît Mandelbrot, How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. 'Science, New Series, Vol. 156, No. 3775. May 5, 1967, pp. 636-638.

4. Benoît Mandelbrot. Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión. Tusquets Editores, S.A., 1993. ISBN 978-84-7223-458-1

5. Michael Barnsley, Fractals everywhere, Academic Press Inc., 1988. ISBN 0-12-079062-9.

6. Heinz-Otto Peitgen, Dietmar Saupe, editors. The Science of Fractal Images. Springer. 1988.

**** Hugo Donner** es Ingeniero Industrial, empresario industrial y directivo de la Cámara de Industrias del Uruguay, ex-director del LATU, profesor de Simulación Empresarial en la Universidad Católica, ex-asesor de programas educativos en la Universidad ORT y pionero en la industria del software nacional, y en los movimientos por la Calidad.*

Notas

(1) La Curva de Peano, es una curva continua que, en su límite, al que converge uniformemente, recubre todo el plano sin pasar dos veces por el mismo punto. Lleva el nombre del matemático italiano Giuseppe Peano. (ver imagen en página 9) Fuente: Wikipedia

(2) Si se construye la curva de Koch (ilustrada en la página siguiente), sobre los tres lados de un triángulo equilátero, se obtendrá un contorno bastante similar a un copo de nieve.

(3) Información tomada de: http://www.dma.fi.upm.es/sonia/practicas/carlos/NATURA_archivos/frame.htm

(4) El efecto mariposa suele explicarse con la siguiente frase: “Si una mariposa agita sus alas en Pekin, puede producirse un tornado en Texas el mes siguiente”. Por más información Ver Henri Poincaré: Problema de los tres cuerpos, Jacques Hadamard: ejemplo del billar.

(5) Los conjuntos de Julia (así llamados por el matemático Gaston Julia) son una familia de conjuntos fractales, que se obtienen al estudiar el comportamiento de los números complejos al ser iterados por una función holomorfa. El Conjunto de Mandelbrot es el buque insignia de los fractales, y el que ha sido más veces estudiado y representado. Se obtiene por la aplicación iterada de la función $Zn+1 = Zn^2 + C$ *en el plano complejo, donde C es la coordenada del punto que se pretende definir si pertenece o no al conjunto (un pixel del monitor), y Z inicial es un valor cualquiera, por ejemplo cero. Si luego de un número determinado de iteraciones, por ejemplo 50, el módulo de Z no diverge (por ejemplo no supera el valor 2), entonces se lo define como perteneciente al conjunto, y se lo acostumbra representar coloreado de negro. En la generación de imágenes, se acostumbra asignar a los puntos que no pertenecen al conjunto, una escala de colores proporcional a la velocidad de divergencia.*

La dimensión fractal

Fuente: Wikipedia

La medición de formas fractales (fronteras, poligonales - curvas formadas solo por segmentos de recta unidos-, etc.) ha obligado a introducir conceptos nuevos que van más allá de los conceptos geométricos clásicos. Dado que un fractal está constituido por elementos cada vez más pequeños, el concepto de longitud no está claramente definido: Cuando se quiere medir una línea fractal con una unidad, o con un instrumento de medida determinado, siempre habrá objetos más finos que escaparán a la sensibilidad de la regla o el instrumento utilizado, y también a medida que aumenta la sensibilidad del instrumento aumenta la longitud de la línea.

Esto sucede con la curva de Koch.

Koch construyó su curva de la siguiente manera: tomó como semilla un segmento. El segmento inicial (cuya longitud se supone r=1) se divide en tres partes iguales, la parte central se sustituye por dos segmentos de la misma medida formando un triángulo equilátero con el segmento que se ha suprimido.

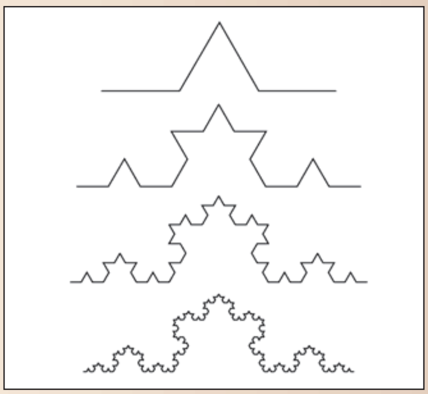
Cada uno de los segmentos obtenidos mide L=r/3, así pues la curva que ocupa el espacio inicial va aumentando en cada paso su longitud, para el primer paso resulta: 4 x (r/3)=4r/3

Cada uno de los segmentos obtenidos de la iteración anterior se vuelve a dividir en tres partes iguales y se procede de la misma manera: la parte central de cada segmento obtenido se sustituye por dos segmentos de la misma medida formando un triángulo equilátero con el segmento que se ha suprimido.

En esta iteración cada uno de los segmentos obtenidos mide (r / 3) / 3 = r / 9 , y como obtenemos 16 segmentos nuevos la longitud total será 16 x (r / 9) = $(4 / 3)^2$ x r

Se aplica la iteración de nuevo a cada segmento obtenido al dividirlo en tres partes iguales y se observa que la longitud vuelve a ser 4/3 de la anterior.

Se puede deducir entonces que la longitud de la curva después de n iteraciones va a ser: $(4 / 3)^n$ x r. Cada curva es 4/3 de la anterior. De aquí se deduce que la longitud de la curva de Koch es infinita; a medida que crece el número de iteraciones, la longitud aumenta indefinidamente; y que un fragmento acotado de la curva aumentaría indefinidamente su longitud.



¿Puede esto ser así?

Como la longitud de la línea fractal depende de la apreciación del instrumento, o de la unidad de medida que tomemos, la noción de longitud en estos casos, carece de sentido. Para ello se ha ideado otro concepto: el de dimensión fractal.

Como precedente a la dimensión fractal está la dimensión definida por Felix Hausdorff en 1919, perfeccionada más tarde por Besicovitch. La dimensión Hausdorff H(X) de un objeto fractal X mide el número de conjuntos de longitud L que hacen falta para cubrir X por L.

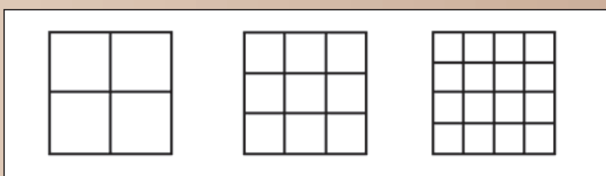
Una de las definiciones de objeto fractal aceptadas actualmente, debida a Mandelbrot, considera fractal aquel objeto cuya dimensión (D) de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que la dimensión euclídea (DE) o topológica.

La dimensión fractal D es una generalización de la dimensión euclídea DE. Si partimos de un segmento de longitud X= 1, y lo partimos en segmentos de longitud L obtendremos $N_{(L)}$ partes, de manera que

$N_{(L)}$ x L^1 = 1 cualquiera que sea L:

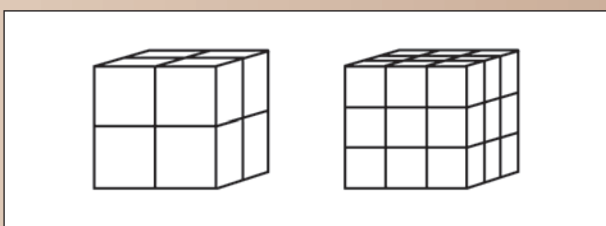
Si el objeto inicial es un cuadrado de superficie 1, y lo comparamos con unidades cuadradas, cuyo lado sea de longitud L, el número de unidades que es necesario para recubrirlo $N_{(L)}$, cumple

$N_{(L)}$ x L^2 = 1 cualquiera que sea L:



Si, por último, el objeto que tomamos es tridimensional, como, por ejemplo, un cubo de volumen 1, y lo medimos en relación con unidades que sean cubos de arista L, entonces se cumple que

$N_{(L)}$ x L^3 = 1 Cualquiera que sea L:



De todo esto podemos generalizar que la dimensión fractal de un objeto geométrico es D si

$N_{(L)}$ x L^D = 1

donde $N_{(L)}$ es el número de objetos elementales, o de unidades, de tamaño L que recubren - o que completan - el objeto.

Para obtener D, despejando:

$L^D = 1 / N_{(L)}$

$\log L^D = \log (1 / N_{(L)}) = \log 1 - \log N_{(L)} = 0 - \log N_{(L)}$

D x log L = - log $N_{(L)}$

de donde D = log $N_{(L)}$ / (- log L) = log $N_{(L)}$ / log (1 / L)

Para la curva de Koch, $N_{(L)}$ vale 4 (la cantidad de segmentos que sustituyen al segmento original de largo 1), y L vale 1/3, por lo tanto 1/L vale 3,

entonces D es log(4) / log (3) = 1.2618….